Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics, 36, 1, 2024. (77-92)

Ferdowsi University of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

Page Journal: mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

Society of Manufacturing Engineering of Iran

Implementation of Gibbs-Appell method in the Dynamic Analysis of a Novel Serial-Parallel Hybrid Robot PP-(3RSS-PS)

Research Article

Seyed Nader Nabavi[1] , Javad Enferadi[2]

DOI: 10.22067/JACSM.2023.83429.1193

1- Introduction

Parallel robots can achieve higher accuracy and structural stiffness compared to serial robots. A new branch of robots, known as hybrid robots, has emerged that takes advantage of both serial and parallel robots. These robots can be utilized in various applications, including minimally invasive surgical procedures, machining operations, and simulation industries.

In 2020, Enferadi [12] introduced the 3RSS-S spherical parallel robot, which has suitable features for motion simulation. By modifying the introduced robot and combining it with an XY gantry serial robot, he introduced a full DOF hybrid motion platform. The main attribute of the robot is the hollow shaft design and consequently, unlimited yaw motion of the robot. On the other hand, the compact design of the robot and its suitable workspace volume index have made it suitable for simulator applications. Therefore, analyzing the kinematics and dynamics of the introduced robot is of special importance.

There are certain simple methods to obtain kinematic equations and Jacobian analysis of robots. Obtaining a dynamic model of a robot is a prerequisite for control and simulation purposes. To obtain the dynamic equation of the PP-(3RSS-PS) hybrid robot, the Gibbs-Appell method is considered a simple energy-based method in which less computational burden is required. To ensure the accuracy of the dynamic model, the robot is modeled in MSC-ADAMS software. For this purpose, six independent trajectories according to each DOF of the robot were defined and results were verified. The presented robot has the potential to be used as a new platform for the simulation industry.

2- Structural model of the PP-(3RSS-PS) robot

The PP-(3RSS-PS) robot is a 6-DOF hybrid robot constituting a 4-DOF parallel robot mounted on a conventional serial XY table. In Figure 1, a hybrid robot is shown in which the parallel part of the robot is mounted on the XY table. The parallel robot part has a 3RSS-PS structure which consists of a base platform connected by four kinematic chains to the moving platform. Three of these kinematic chains are identical RSS legs responsible for the robot's orientation and the fourth kinematic chain is a PS leg.

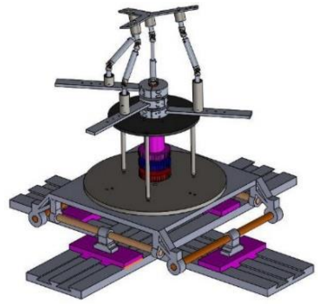


Figure 1: The 3D Model of the PP-(3RSS-PS) hybrid robot

3- Governing kinematics equations of the robot

Kinematics is the study of relationships between the end-effector motion and robot actuators. Figure 2 shows the kinematics chain of the robot. By solving the inverse kinematics of the hybrid robot, eight solutions for the robot actuators are obtained.

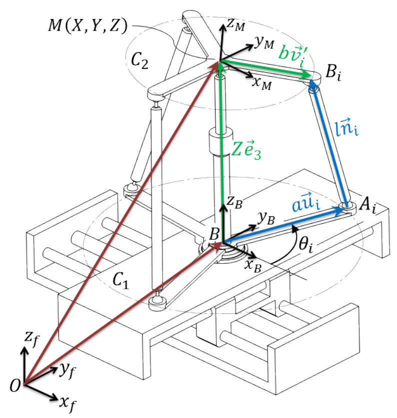


Figure 2: The i^{th} closed kinematic chain of the PP-(3RSS-PS) robot

The matrices $\dot{q} = [\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T$ and $\dot{\mathcal{X}} = [\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z} \quad \Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T$ are defined as the joint

*Manuscript received: July 14, 2023. Revised, July 30, 2023, Accepted, August 20, 2023.

[1] Corresponding author: Assistant Professor Department of Mechanical Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran. **Email**: s.nader.nabavi@ub.ac.ir

[2] Mechanical Engineering Department, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran.

velocities and EE velocities of the robot, respectively. As a result, the Jacobian matrix of the PP-(3RSS-PS) robot is obtained as:

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathbf{J}\dot{q}; \qquad \mathbf{J} = \mathbf{J}_2^{-1}\mathbf{J}_1 \tag{1}$$

in which $\mathbf{J}$ is the Jacobian matrix.

3. Governing dynamics equations of the robot

The general form of the Gibbs-Appell equation is as follows:

$$S = \frac{1}{2}m(\vec{a}_A.\vec{a}_A) + \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}.\frac{\partial \vec{H}_A}{\partial t}\right) + \vec{\alpha}.(\vec{\omega} \times \vec{H}_A) + m\vec{a}_A.\left(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{G/A}\right) + m\vec{a}_A.\left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{G/A})\right] \tag{2}$$

As can be seen, the terms of the Gibbs-Appell equation are similar to those of kinetic energy function. To specify the motion of the robot, a set of generalized coordinates should be selected. In the case of PP-(3RSS-PS) hybrid robot, the generalized coordinates are defined as the vector form $q = [X \quad Y \quad Z \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$. In order to find generalized forces governing the robot motion corresponding to each generalized coordinate, first, the Gibbs-Appell equation is constructed for each of the moving components of the robot. Next, the derivative of these equations concerning the acceleration of the desired generalized coordinates is calculated. By the superposition of the obtained partial derivatives, the equation of generalized forces is written as follows:

$$Q_i = \frac{\partial S_{P_1}}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial S_{P_2}}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{q}_i} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial S_a^j}{\partial \ddot{q}_i} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial S_l^j}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial S_P}{\partial \ddot{q}_i} \tag{3}$$

In Eq. 3, the acceleration energy function of X, Y, and Z actuators are represented by S_{P_1}, S_{P_2}, and S_{P_3}, respectively. Moreover, the acceleration energy function for the j^{th} rotary actuators, j^{th} middle link, and moving platform are indicated by S_a^j, S_l^j, and S_P, respectively. Also, Q_i refers to the generalized force corresponding to the i^{th} generalized coordinate that is equal to:

$$Q = [F_{e_1} \quad F_{e_2} \quad F_{e_3} \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3]^T \tag{4}$$

where F_{e_i} is the applied force, and $\vec{e}_i$ and τ_i represent the applied torque to each rotary link.

4- Simulation and results validation

To ensure that the dynamic equations of the robot have been solved properly, the results of the theoretical model are compared with MSC-ADAMS commercial dynamics modeling software. In order to create a suitable simulation for the desired hybrid robot, six trajectories are defined in the Cartesian workspace. Figure 3 shows the diagram of the forces and torques of the robot actuators for the Surge trajectory, which shows a good agreement between the analytical solution and the simulation.

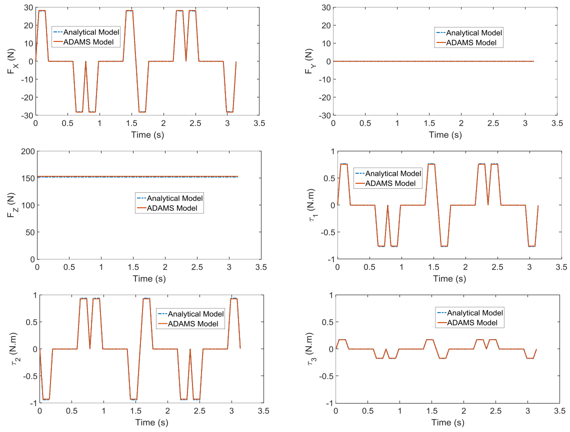


Figure 3: Required actuators force of the PP-(3RSS-PS) robot applied in the surge trajectory

5- Conclusion

Simulation results using MSC-ADAMS outputs in six particularly defined trajectories proved the correctness of the obtained dynamic model for global consideration. As a result, analytical and simulation models can be used interchangeably. The straightforwardness of Gibbs-Appell method made equation derivation and programming code generation easy since a fixed function is used to calculate the dynamic of each part separately. What distinguished this robot from other robots is its independent modular X and Y workspace and unlimited yaw movement with a compact footprint design. Independent movement in the X and Y directions, despite the need to use larger actuators in these two directions, will make the path design and control of the robot much simpler in these directions. The proposed PP-(3RSS-PS) hybrid robot could be used as a case study for optimization and comparison with other conventional simulators considering different performance indices.

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

انجمن مهندسی ساخت و تولید ایران

دانشگاه فردوسی مشهد

پیاده‌سازی روش گیبس- اپل در تجزیه و تحلیل دینامیکی یک ربات جدید هیبریدی سریال- موازی PP-(3RSS-PS)*

مقاله پژوهشی

سید نادر نبوی[۱] جواد انفرادی[۲]

DOI: 10.22067/JACSM.2023.83429.1193

چکیده *این مقاله یک طراحی مفهومی از یک ربات هیبریدی جدید به نام PP-(3RSS-PS) را معرفی می‌کند که به طور خاص برای شبیه‌سازی حرکت در نظر گرفته شده است. ربات ارائه شده چندین مزیت قابل توجه را ارائه می‌دهد، از جمله طراحی ساختاری ساده و فشرده که باعث ایجاد فضای کاری بزرگ برای ربات می‌شود. محورهای X و Y برای تسهیل فازهای شتاب طولانی طراحی شده‌اند، در حالی که طراحی شفت توخالی سیستم انتقال قدرت، حرکت یاو نامحدود را امکان‌پذیر می‌کند. در کاربردهای خاصی مانند مانورهای هوایی مانند حرکت هلیکوپتر، توانایی دست‌یابی به حرکت در جهت یاو نامحدود برای ارائه شبیه‌سازی‌های دقیق و معلق در هوا اهمیت زیادی دارد. برای برقراری ارتباط بین فضای مفاصلی و فضای کارتزین، تحلیل‌های جامع سینماتیک، ژاکوبین و دینامیکی ربات انجام می‌شود. این روابط مقدماتی، پایه و اساس تحقیقات بعدی مانند مطالعات بهینه‌سازی را میسر می‌کند. فرمول گیبس-اپل برای استخراج معادلات دینامیکی استفاده می‌شود که نسبت به روش لاگرانژ از کارایی محاسباتی برخوردار است. برای اعتبارسنجی مدل تحلیلی، شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار MSC-ADAMS انجام شده است. این شبیه‌سازی شامل شش مسیر از پیش تعریف شده است که از یک شبیه‌ساز حرکت صنعتی اتخاذ شده است. اعتبارسنجی موفقیت‌آمیز نتایج نه تنها صحت مدل تحلیلی را تأیید می‌کند، بلکه انگیزه‌ای برای تحقیقات بیشتر در جستجوی یک شبیه‌ساز حرکت جایگزین استثنایی می‌کند.*

واژه‌های کلیدی ربات هیبریدی، سنتز ربات‌ها، دینامیک، گیبس- اپل، شبیه‌ساز حرکتی.

Implementation of Gibbs-Appell Method in Dynamic Analysis of a Novel Serial-Parallel Hybrid Robot PP-(3RSS-PS)

Seyed Nader Nabavi Javad Enferadi

Abstract *This paper introduces a conceptual design of a new hybrid robot, named PP-(3RSS-PS), specifically intended for motion simulation. The presented robot offers several notable advantages, including a simple and compact structural design that optimizes its large workspace. The modular X and Y axes are engineered to facilitate extended acceleration phases, while the power transmission system's hollow shaft design enables unlimited yaw motion. In certain applications like aerial maneuvers, dogfights, and helicopter operations, the ability to achieve unlimited yaw motion holds significant importance for delivering precise and immersive simulations. To establish the relationship between joint space and Cartesian space parameters, comprehensive kinematic, Jacobian, and dynamic analyses of the robot are performed. These preliminary relations lay the foundation for subsequent investigations, such as optimization studies. The Gibbs-Appell formulation is employed to derive the dynamic equations, leveraging its computational efficiency over the Lagrange method. To validate the analytical model, a simulation using MSC-ADAMS software is conducted. This simulation incorporates six predefined trajectories adopted from an industrial motion simulator. Successful validation of the results would not only confirm the accuracy of the analytical model but also motivate further research in search of an exceptional alternative motion simulator.*

Key Words Hybrid robot, Robot synthesis, Dynamic, Gibbs-Appell, Motion simulator.

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۲/۵/۲۹ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۲/۴/۲۳ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بجنورد، بجنورد،

(۲) استادیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد.

Email: s.nader.nabavi@ub.ac.ir

مقدمه

ربات‌های سری به طور گسترده‌ای در کاربردهایی که به فضای کاری بزرگ و ماهرانه نیاز دارند، استفاده می‌شوند. از طرفی توانایی ربات‌های موازی در دست‌یابی به دقت بالاتر و همچنین سفتی ساختاری بالاتر، بیشتر از ربات‌های سری است. شاخه جدیدی از ربات‌ها که از مزایای هر دو نوع ربات سری و موازی بهره می‌برند در اوایل دهه ۹۰ معرفی شدند که به عنوان ربات هیبریدی شناخته می‌شوند [1-3].

محققان ربات‌های هیبریدی مختلفی با ویژگی‌های منحصر به فرد طراحی کرده‌اند. بسته به ترتیب زنجیره سینماتیک، یک ساختار ترکیبی را می‌توان به نوع موازی- موازی، نوع سریال- موازی و نوع موازی- سریال طبقه‌بندی کرد [4,5]. در عمل‌های جراحی کم تهاجمی که هر دو دقت و مهارت از اهمیت یکسانی برخوردارند، معمولا ربات‌های هیبریدی موازی- سریال انتخاب می‌شوند. برای این کاربرد، به طور کلی، یک ربات سریال به عنوان یک ماژول ماکرو عمل می‌کند و یک ربات موازی وظیفه موقعیت‌دهی میکرو را انجام می‌دهد [6,7]. در صنعت شبیه‌سازی، ربات‌های هیبریدی می‌توانند برای وسایل نقلیه خاص طراحی شوند. ربات جدیدی به نام Dim که توسط سازندگان خودرو طراحی و آزمایش شده است، یک ربات هیبریدی موازی- موازی با زنجیره سینماتیک (3-UPS)-(6-UPS) است [8]. با استفاده از این ربات تولید حرکت واقعی برای شبیه‌سازی خودرو امکان‌پذیر شده است. پیش از این، ربات‌های استوارت بر روی یک یا دو ریل خطی عمود بر یکدیگر برای کاربردهای شبیه‌سازی خودرو نصب می‌شدند. در [9] یک ربات هیبریدی برای جراحی ایمپلنت دندان معرفی شده است که از ربات استوارت برای عمل جراحی با دقت بالا استفاده می‌کند. دونگ و همکاران نیز در [10] مدل‌سازی دینامیکی یک ربات هیبریدی ۵ درجه آزادی برای کاربردهای ماشین‌کاری را انجام داده‌اند. همچنین آن‌ها به طراحی بهینه این ربات بر اساس شاخص‌های عملکردی ربات پرداخته‌اند و تأثیر متغیرهای طراحی را بر روی این شاخص‌ها بررسی کرده‌اند. در [11] نیز یک ربات هیبریدی نرم- سخت با چندین ماژول معرفی شده است. هر یک از ماژول‌ها می‌تواند برای محدوده‌های حرکتی مختلف و نیازهای نیرویی متفاوت به کار گرفته شود و یک ربات ماژولار با انواع ساختارهای سینماتیک داشت.

اکثر ربات‌های شبیه‌ساز حرکت هیبریدی بیش از ۶ درجه آزادی دارند. در این مقاله، ترکیبی از ربات XY و 3RSS-PS برای ساخت یک سکوی متحرک هیبریدی کامل استفاده شده است. ربات 3RSS-PS معرفی شده در این مقاله نسخه اصلاح شده ربات موازی کروی 3RSS-S است که توسط انفرادی [12] ارائه شده است که از ویژگی‌های مناسب برای کاربرد شبیه‌سازی حرکت بهره می‌برد. ویژگی اصلی ربات، طراحی شفت توخالی و در نتیجه آن حرکت در جهت یاو نامحدود است. ترکیب ربات 3RSS-PS با میز متحرک XY، یک ربات ترکیبی با شاخص حجم فضای کاری بزرگ و مناسب برای کاربردهای شبیه ساز ایجاد می‌کند [13-16]. استفاده از شاخص‌هایی برای بهینه‌سازی ساختار ربات‌های هیبریدی مختلف رایج است [17,18]. طیف گسترده‌ای از شاخص‌های عملکرد با استفاده از معادلات سینماتیکی، ماتریس ژاکوبین یا معادلات دینامیکی وجود دارد.

به دست آوردن مدل دینامیکی یک ربات مقدماتی برای اهداف کنترل و شبیه‌سازی است. به طور کلی دینامیک کلاسیک، حرکت ربات‌ها را با دو رویکرد دینامیک برداری و دینامیک تحلیلی توصیف می‌کند. دینامیک برداری بر اساس استفاده مستقیم از قانون حرکت نیوتن است، در حالی که دینامیک تحلیلی از روش‌های متداول انرژی و توابع اسکالر مانند انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل استفاده می‌کند. روش‌های دینامیکی برداری متفاوتی مانند روش نیوتن اویلر [19,20] و نظریه پیچ (Screw theory) [21] و همچنین روش‌های مبتنی بر انرژی مانند روش لاگرانژی [22]، روش کین [23] و اصل کار مجازی [24] استفاده می‌شود. برای به دست آوردن معادله دینامیکی حرکت ربات‌های مختلف هر یک از این روش‌ها نسبت به روش‌های دیگر بسته به مطالعه موردی مزایای خاصی دارند. اساسا برای به دست آوردن معادلات دینامیکی با استفاده از روش مبتنی بر انرژی، بار محاسباتی کمتری مورد نیاز است. برای به دست آوردن معادله دینامیکی ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS)، روش گیبس- آپل (Gibbs-Appell) به عنوان یک روش ساده مبتنی بر انرژی در نظر گرفته شده است.

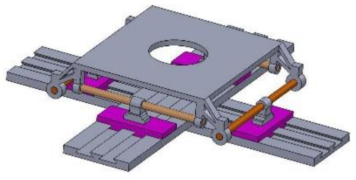
در این مقاله ضمن ارائه یک ربات جدید هیبرید (سریال – موازی)، مدل دینامیکی این ربات نیز استخراج و صحه‌گذاری شده است. در مقایسه با سایر ربات‌های مورد استفاده برای

شبیه‌سازی حرکت، مکانیزم پیشنهادی از مزیت امکان ایجاد حرکت نامحدود یاو بهره می‌برد که در بسیاری از کاربردها مفید می‌باشد. مستقل بودن حرکت در جهت‌های X و Y علی رغم ایجاد نیاز به استفاده از عملگرهای بزرگ‌تر در این دو راستا، طراحی مسیر و کنترل ربات در این راستاها را بسیار ساده‌تر خواهد کرد. با ویژگی‌های ذکر شده ربات پیشنهادی از شاخص فضای کاری مناسبی برخوردار است و همچنین دقت و سفتی ربات به واسطه ساختار موازی بالاتر می‌باشد.

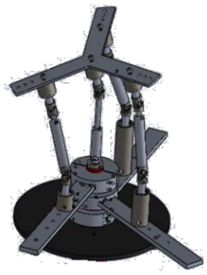
هندسه ربات

ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS) با شش درجه آزادی از یک ربات موازی چهار درجه آزادی تشکیل شده است که بر روی یک میز سریال XY معمولی نصب شده است. در شکل (۱) بخش ربات سریال و موازی ربات هیبریدی به طور جداگانه نشان داده شده است. بخش سریال از دو ماژول خطی عمود بر هم ساخته شده است. این ماژول‌ها در طول‌ها و مشخصات مختلف به راحتی در دسترس هستند و می‌توان آن‌ها را با توجه به نیازهای کاربردی انتخاب کرد. بخش ربات موازی با ساختار 3RSS-PS از یک صفحه پایه تشکیل شده است که توسط چهار زنجیره سینماتیکی به صفحه متحرک متصل شده است. سه تا از این زنجیره‌های سینماتیکی پایه‌های RSS یکسانی هستند که برای جهت‌گیری ربات مورد استفاده قرار می‌گیرند و چهارمین زنجیره سینماتیکی یک پایه PS است. لازم به ذکر است هنگامی که صفحه متحرک ربات نسبت به صفحه ثابت ربات دارای جهت‌گیری باشد، حرکت در امتداد محور Z نیز می‌تواند به تنهایی بر جهت‌گیری مجری نهایی ربات تأثیر بگذارد. هر پایه RSS شامل یک مفصل چرخشی و یک جفت مفصل کروی متوالی است، در حالی که پایه PS از یک مفصل کشویی متصل به یک مفصل کروی ساخته شده است.

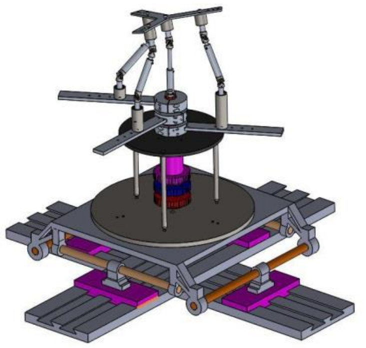
ساختار هیبریدی این ربات مزایای متعددی را به همراه دارد. طول محورهای X و Y را می‌توان به طور مستقل و به اندازه دل‌خواه برای ایجاد حرکت انتقالی خالص انتخاب کرد. آرایش منحصر به فرد لینک‌های دورانی نیز به ربات اجازه می‌دهد تا چرخش نامحدود حول محور Z داشته باشد.



(الف)



(ب)



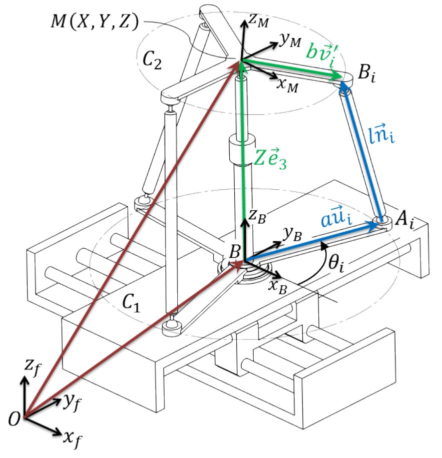
(پ)

شکل ۱ الف) بخش سریال، ب) بخش موازی، پ) ربات هیبریدی

سینماتیک ربات

علم سینماتیک مطالعه رابطه بین حرکت مجری نهایی ربات و محرک‌های ربات است. مسئله سینماتیک معکوس موقعیت و جهت‌گیری مجری نهایی ربات را با حرکت محرک‌ها مرتبط می‌کند. در شکل (۲) نمای شماتیک ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS) آورده شده است. لازم به ذکر است که برای ساده‌سازی معادلات، ضخامت اجزا نادیده گرفته شده است. در شکل (۲)، C_1 یک صفحه دایره‌ای با ضخامت صفر است که به جای صفحه پایه استفاده می‌شود و از مرکز اتصالات کروی پایینی عبور می‌کند. به طور مشابه، C_2 جایگزینی برای صفحه متحرک است که مرکز اتصالات کروی بالایی در قسمت محیطی آن قرار دارد. سیستم مختصات پایه $\{x_B y_B z_B\}$ و سیستم مختصات متحرک $\{x_M y_M z_M\}$ در مرکز صفحات C_1 و C_2 یعنی نقاط B و M قرار دارند. هر کدام از این سیستم‌های مختصات بر حسب سیستم

مختصات جهانی $\{x_f y_f z_f\}$ بیان می‌شوند. بردارهای واحد $\vec{u}_i$ و $\vec{v}_i$ نیز به ترتیب راستای یکه بردارهای $\overrightarrow{BA_i}$ و $\overrightarrow{MB_i}$ را نشان می‌دهند. طول لینک‌های میانی که نقاط A_i را به نقاط B_i متصل می‌کنند برابر l است. بردار یکه $\vec{n}_i$ نیز راستای هر لینک میانی را مشخص می‌کند. نقطه M نشان داده شده در شکل با مختصات (X, Y, Z) نیز به عنوان مجری نهایی ربات عمل می‌کند.



شکل ۲ زنجیره سینماتیکی i ام ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS)

ماتریس تبدیل بین سیستم مختصات جهانی و پایه فقط شامل انتقال است در حالی که سیستم مختصات متحرک جهت‌گیری‌های متفاوتی را می‌تواند نسبت به سیستم مختصات پایه داشته باشد. بردارهای واحد در سیستم مختصات ثابت و پایه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{e}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T,\ \vec{e}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T,\ \vec{e}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{۱}$$

برای به دست آوردن ماتریس دوران سیستم مختصات متحرک نسبت به سیستم مختصات پایه یا همان ماتریس $\mathcal{R}$ از زوایای اویلر استفاده می‌شود که دارای سه دوران متوالی ϕ، θ و ψ به ترتیب حول محورهای X، Y و Z است. فرم توسعه یافته ماتریس $\mathcal{R}$ به صورت معادله (۲) بیان می‌شود.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_Z \mathcal{R}_Y \mathcal{R}_X = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\phi s\theta - c\phi s\psi & s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta \\ c\theta s\psi & c\psi c\phi + s\theta s\phi s\psi & c\phi s\psi s\theta - c\psi s\phi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \tag{۲}$$

مطابق شکل (۲)، معادله شکل بسته زنجیره سینماتیکی iام به صورت زیر نوشته شده است:

$$\overrightarrow{OB} + a\vec{u}_i + l\vec{n}_i = \overrightarrow{OM} + \mathcal{R} b \vec{v}'_i \tag{۳}$$

که در آن a و b به ترتیب اندازه بردارهای $\overrightarrow{BA_i}$ و $\overrightarrow{MB_i}$ هستند. بردارهای تعریف شده در سیستم مختصات متحرک با نماد "′" متمایز می شوند. با ضرب نقطه‌ای معادله (۳) در بردار $\vec{n}_i$ و جای‌گذاری $\vec{u}_i$ با $[\cos\theta_i \quad \sin\theta_i \quad 0]^T$ خواهیم داشت:

$$E_1 \sin\theta_i + E_2 \cos\theta_i = E_3 \tag{۴}$$

که در آن،

$$E_1 = 2a(\mathcal{R} b \vec{v}'_i)_y \tag{۵}$$

$$E_2 = 2a(\mathcal{R} b \vec{v}'_i)_x \tag{۶}$$

$$E_3 = (\mathcal{R} b \vec{v}'_i)_x^2 + (\mathcal{R} b \vec{v}'_i)_y^2 + ((\mathcal{R} b \vec{v}'_i)_z + Z)^2 + a^2 - l^2 \tag{۷}$$

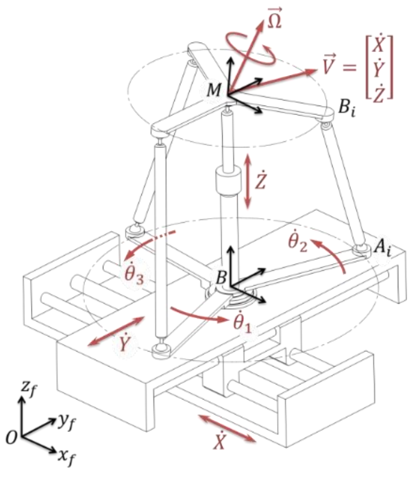
زیرنویس k که برابر x یا y یا z است، مؤلفه بردار را نشان می‌دهد. با استفاده از معادلات مثلثاتی مقدار θ_i از معادله (۴) استخراج خواهد شد و برابر است با:

$$\theta_i = \tan^{-1}(E_1/E_2) \pm \tan^{-1}\left(\sqrt{E_1^2 + E_2^2 - E_3^2}/E_3\right) \tag{۸}$$

دو راه حل ممکن برای هر θ_i وجود دارد. لذا با توجه به سه محرک دورانی موجود ۸ جواب برای سینماتیک معکوس ربات هیبریدی وجود دارد.

تحلیل سرعت و شتاب ربات

ماتریس ژاکوبین سرعت‌ها را از فضای مفاصل به مجری نهایی ربات نگاشت می‌کند. در شکل (۳) بردارهای سرعت برای ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS) آورده شده است.



شکل ۳ پارامترهای سرعت ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS)

با مشـــتق‌گیری از معادله (۳) و با در نظر گرفتن بردارهای $\dot{\mathcal{X}} = [\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z} \quad \Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T$ و $\dot{q} = [\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T$ به عنوان بردار ســـرعت مفاصـــل محرک و بردار ســـرعت مجری نهایی، ماتریس ژاکوبین ربات PP-(3RSS-PS) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\mathcal{X}} = J\dot{q}; \qquad J = J_2^{-1}J_1 \tag{۹}$$

که ماتریس‌های J_1 و J_2 به صورت زیر هستند:

$$J_1 = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & & & \emptyset_{3\times3} & & \\ & -n_1^T\vec{k} & a\vec{n}_1^T(\vec{e}_3\times\vec{u}_1) & 0 & 0 \\ \emptyset_{3\times2} & -n_2^T\vec{k} & 0 & a\vec{n}_2^T(\vec{e}_3\times\vec{u}_2) & 0 \\ & -n_3^T\vec{k} & 0 & 0 & a\vec{n}_3^T(\vec{e}_3\times\vec{u}_3) \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & \emptyset_{3\times3} \\ & b(\mathcal{R}b\vec{v}_1'\times\vec{n}_1)^T \\ \emptyset_{3\times3} & b(\mathcal{R}b\vec{v}_2'\times\vec{n}_2)^T \\ & b(\mathcal{R}b\vec{v}_3'\times\vec{n}_3)^T \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

در معادلات (۱۰) و (۱۱)، ماتریس های $\emptyset$ و I به ترتیب نشان دهنده ماتریس‌های صفر و همانی هستند. سرعت زاویه‌ای لینک‌های میانی یا همان $\vec{\omega}_i$ نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{\omega}_i = \frac{1}{l}\left[\dot{Z}\vec{n}_i\times\vec{e}_3 + b\vec{n}_i\times\left(\vec{\Omega}\times\mathcal{R}\vec{v}_i'\right) - a\dot{\theta}_i\vec{n}_i\times(\vec{e}_3 \times\vec{u}_i)\right] \tag{۱۲}$$

برای به دست آوردن معادلات دینامیکی، می‌بایست مشتق دوم موقعیت و جهت‌گیری تمامی قطعات متحرک محاســـبه گردد. پس از ســـاده‌ســـازی، معادله شـــتاب بین اجزای ربات را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\ddot{\theta}_i = \frac{1}{a\vec{n}_i\cdot(\vec{e}_3\times\vec{u}_i)}\Big\{a\dot{\theta}_i^2(\vec{n}_i\cdot\vec{u}_i) - l\vec{n}_i \cdot\left(\vec{\omega}_i\times(\vec{\omega}_i\times\vec{n}_i)\right) + \ddot{Z}(\vec{n}_i\cdot\vec{e}_3) + b\vec{n}_i\cdot\left(\dot{\vec{\Omega}}\times\mathcal{R}\vec{v}_i'\right) + b\vec{n}_i \cdot\left(\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\mathcal{R}\vec{v}_i'\right)\right)\Big\} \tag{۱۳}$$

$$\vec{\alpha}_i = \frac{1}{l}\Big\{\ddot{Z}(\vec{n}_i\times\vec{e}_3) + b\vec{n}_i\times\left(\dot{\vec{\Omega}}\times\mathcal{R}\vec{v}_i'\right) + b\vec{n}_i \times\left(\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\mathcal{R}\vec{v}_i'\right)\right) + a\dot{\theta}_i^2(\vec{n}_i\times\vec{u}_i) - l\vec{n}_i\times\left(\vec{\omega}_i\times(\vec{\omega}_i\times\vec{n}_i)\right) - a\ddot{\theta}_i\vec{n}_i \times(\vec{e}_3\times\vec{u}_i)\Big\} \tag{۱۴}$$

که در آن $\ddot{\theta}_i$ شتاب زاویه‌ای i امین محرک دورانی، $\vec{\alpha}_i$ شتاب زاویه‌ای i امین لینک میانی و $\dot{\vec{\Omega}}$ شتاب زاویه‌ای صفحه متحرک ربات است.

تحلیل دینامیک ربات

هدف از مسئله دینامیک معکوس ربات یافتن نیروهای مورد نیاز محرک‌ها برای پیمایش یک مسیر معین است. روش‌های مختلفی برای به دست آوردن معادلات دینامیکی یک ربات وجود دارد. در سال ۱۸۷۹ [25] گیبس روشی مبتنی بر روش‌های انرژی ارائه کرد که توسط Appell در سال ۱۸۹۹ توسعه یافت [26]. فرمول گیبس–آپل در سیستم‌های غیرهولونومیک در مقایسه با روش لاگرانژ برتری دارد، زیرا سرعت مختصات تعمیم یافته را به همراه مشتقات آن‌ها جایگزین می‌کند. شکل کلی معادله گیبس–آپل به صورت زیر است:

$$S = \frac{1}{2}m(\vec{a}_A.\vec{a}_A) + \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}.\frac{\partial\vec{H}_A}{\partial t}\right) + \vec{\alpha}.(\vec{\omega}\times\vec{H}_A) + m\vec{a}_A.\left(\vec{\alpha}\times\vec{r}_{G/A}\right) + m\vec{a}_A.\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{G/A})\right] \tag{۱۵}$$

همان طور که مشـــاهده می‌شـــود، بخش‌های مختلف معادله گیبس–آپل مشـــابه تابع انرژی جنبشـــی اســـت. به همین دلیل به عنوان تابع انرژی شتاب نیز شناخته می‌شود که در معادله فوق A یک نقطه دل‌خواه از جســـم صـــلب، m جرم جســـم صـــلب، $\vec{a}_A$ بردار شتاب خطی نقطه A و $\vec{\alpha}$ بردار شتاب زاویه‌ای جسم صلب اســـت. $\vec{H}_A$ تکانه زاویه‌ای جســـم صـــلب حول نقطه A، $\vec{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای جسم صلب و $\vec{r}_{G/A}$ بردار موقعیت مرکز جرم جسم صلب نسبت به نقطه A است.

برای مشخص کردن حرکت ربات باید مجموعه‌ای از مختصات تعمیم یافته انتخاب شود. در مورد ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS)، مختصات تعمیم یافته به صورت بردار $q = [X \quad Y \quad Z \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$ تعریف می‌شوند. برای یافتن نیروهای تعمیم یافته حاکم بر حرکت ربات مربوط به هر مختصات تعمیم یافته، ابتدا معادله گیبس–آپل برای هر یک از اجزای متحرک ربات تشکیل می‌شود. سپس مشتق این معادلات با توجه به شتاب مختصات تعمیم یافته مورد نظر محاسبه می‌شود. با مجموع مشتقات جزئی به دست آمده، معادله نیروهای تعمیم یافته به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q_i = \frac{\partial S_{P_1}}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial S_{P_2}}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{q}_i} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial S_a^j}{\partial \ddot{q}_i} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial S_l^j}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial S_P}{\partial \ddot{q}_i}$$
(۱۶)

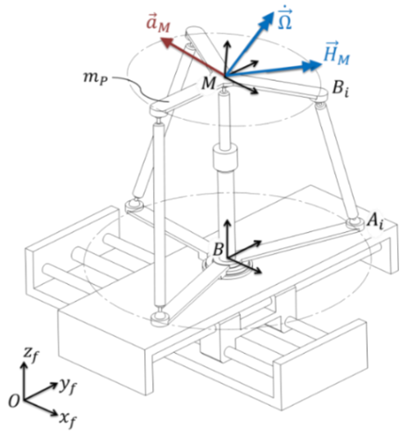
در معادله (۱۶) تابع انرژی شتاب محرک‌ها در راستای X، Y و Z به ترتیب با S_{P_1}، S_{P_2} و S_{P_3} نشان داده شده است. علاوه بر این، تابع انرژی شتاب برای jامین محرک دورانی با S_a^j و برای j امین لینک میانی با S_l^j و با S_P برای صفحه متحرک نشان داده شده است. همچنین Q_i نیروی تعمیم یافته مربوط به iامین مختصات تعمیم یافته است که برابر است با:

$$Q = [F_{e_1} \quad F_{e_2} \quad F_{e_3} \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3]^T \qquad (۱۷)$$

که در آن F_{e_i} نیروی اعمال شده در امتداد $\vec{e}_i$ و τ_i گشتاور اعمال شده به هر لینک دوار است. در بخش زیر مشتق تابع انرژی شتاب برای هر یک از اجزای ربات با توجه به مختصات تعمیم یافته شتاب مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تحلیل معادلات گیبس-آپل برای صفحه متحرک

بردارهای مرتبط با پارامترهای معادله گیبس-آپل برای صفحه متحرک در شکل (۴) نشان داده شده است که شامل بردار شتاب خطی $\vec{a}_M$، بردار شتاب زاویه‌ای $\dot{\vec{\Omega}}$ و تکانه زاویه‌ای صفحه متحرک حول مرکز جرم آن $\vec{H}_M$ است.



شکل ۴ پارامترهای گیبس-آپل برای صفحه متحرک ربات

برای به دست آوردن معادله گیبس-آپل صفحه متحرک، مرکز جرم M به عنوان نقطه دل‌خواه در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، تابع انرژی شتاب برای صفحه متحرک ربات برابر است با:

$$S_P = \frac{1}{2}m_P(\vec{a}_M.\vec{a}_M) + \frac{1}{2}\dot{\vec{\Omega}}\cdot\frac{\partial(\vec{H}_M)}{\partial t} + \dot{\vec{\Omega}}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{H}_M)$$
(۱۸)

که در آن m_P جرم صفحه متحرک و بردار شتاب نقطه M برابر $\vec{a}_M = [\ddot{X} \quad \ddot{Y} \quad \ddot{Z}]^T$ است. مشتق تکانه زاویه‌ای نسبت به زمان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial(\vec{H}_M)}{\partial t} = \frac{\partial({}^{B}I_P\vec{\Omega})}{\partial t} = {}^{B}I_P\dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega}\times{}^{B}I_P\vec{\Omega} \qquad (۱۹)$$

که در آن ${}^{B}I_P$ تانسور اینرسی صفحه متحرک است که در سیستم مختصات پایه {B} بیان شده است. پس از جایگزینی معادله (۱۹) در معادله (۱۸)، مشتق تابع انرژی شتاب صفحه متحرک بر حسب شتاب مختصات تعمیم یافته برابر است با:

$$\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{q}_i} = m_P\left(\vec{a}_M\cdot\frac{\partial\vec{a}_M}{\partial \ddot{q}_i}\right) + \frac{\partial\dot{\vec{\Omega}}}{\partial \ddot{q}_i}\cdot{}^{B}I_P\dot{\vec{\Omega}} + \frac{3}{2}\frac{\partial\dot{\vec{\Omega}}}{\partial \ddot{q}_i}\cdot(\vec{\Omega}\times{}^{B}I_P\vec{\Omega})$$
(۲۰)

مشتق شتاب خطی صفحه متحرک نسبت به شتاب مختصات تعمیم یافته به شرح زیر است:

$$\frac{\partial\vec{a}_M}{\partial \ddot{q}_i} = \vec{e}_i;\ \text{for } i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial\vec{a}_M}{\partial \ddot{q}_i} = 0;\ \text{for } i = 4, 5, 6$$
(۲۱)

همان طور که قبلا گفته شد، بردار $\vec{e}_i$، i امین بردار واحد دستگاه مختصات پایه {B} است. به منظور محاسبه $\partial\dot{\vec{\Omega}}/\partial \ddot{q}_i$ ماتریس ژاکوبین باید مورد بازبینی قرار گیرد. از سینماتیک ربات مشخص است که جهت‌گیری صفحه متحرک به حرکت بخش موازی ربات بستگی دارد. بنابراین، سرعت زاویه‌ای صفحه متحرک $\vec{\Omega}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{\Omega} = J_{4:6,3:6}\dot{q}^* \qquad (۲۲)$$

که در آن $\dot{q}^* = [\dot{Z} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T$ و $J_{m:n,p:q}$ بخشی از ماتریس ژاکوبین شامل ردیف‌هایی از m تا n و ستون‌هایی از p تا q است. با مشتق‌گیری از معادله (۲۲) شتاب زاویه‌ای صفحه متحرک بر حسب مشتقات مختصات تعمیم یافته به دست می‌آید.

$$\dot{\vec{\Omega}} = J_{4:6,3:6}\ddot{q}^* + \dot{J}_{4:6,3:6}\dot{q}^* \qquad (۲۳)$$

با استفاده از معادله‌های بالا، معادله (۲۰) برای هر مختصات تعمیم یافته به صورت معادلات (۲۴) تا (۲۹) محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{q}_1}=\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{X}}=m_P\ddot{X} \quad (۲۴)$$

$$\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{q}_2}=\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{Y}}=m_P\ddot{Y} \quad (۲۵)$$

$$\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{q}_3}=\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{Z}}=m_P\ddot{Z}+J_{4:6,1}^T\left({}^B I_P\dot{\vec{\Omega}}\right)+\frac{3}{2}J_{4:6,1}^T\left(\vec{\Omega}\times {}^B I_P\vec{\Omega}\right) \quad (۲۶)$$

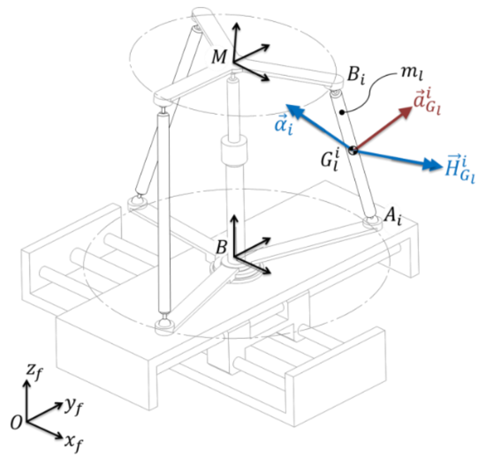
$$\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{q}_4}=\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{\theta}_1}=J_{4:6,2}^T\left({}^B I_P\dot{\vec{\Omega}}\right)+\frac{3}{2}J_{4:6,2}^T\left(\vec{\Omega}\times {}^B I_P\vec{\Omega}\right) \quad (۲۷)$$

$$\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{q}_5}=\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{\theta}_2}=J_{4:6,3}^T\left({}^B I_P\dot{\vec{\Omega}}\right)+\frac{3}{2}J_{4:6,3}^T\left(\vec{\Omega}\times {}^B I_P\vec{\Omega}\right) \quad (۲۸)$$

$$\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{q}_6}=\frac{\partial S_P}{\partial \ddot{\theta}_3}=J_{4:6,4}^T\left({}^B I_P\dot{\vec{\Omega}}\right)+\frac{3}{2}J_{4:6,4}^T\left(\vec{\Omega}\times {}^B I_P\vec{\Omega}\right) \quad (۲۹)$$

تحلیل معادلات گیبس-آپل برای لینک‌های میانی

در شکل (۵) پارامترهای بردارهای معادله گیبس-آپل یک لینک میانی با مرکز جرم G_l^i نشان داده شده است. همچنین شتاب خطی و زاویه‌ای لینک به ترتیب با $\vec{a}_{G_l}^i$ و $\vec{\alpha}_i$ نشان داده شده است.



شکل ۵ پارامترهای گیبس-آپل برای لینک‌های میانی ربات

در ادامه، برای به دست آوردن تابع گیبس-اپل لینک میانی j‌ام، همان روش قسمت قبل تکرار می‌شود. شکل کلی معادله به صورت زیر است:

$$S_l^j=\frac{1}{2}m_l\left(\vec{a}_{G_l}^j.\vec{a}_{G_l}^j\right)+\frac{1}{2}\vec{\alpha}_j\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_{G_l}^j\right)}{\partial t}+\vec{\alpha}_j\cdot\left(\vec{\omega}_j\times\vec{H}_{G_l}^j\right) \quad (۳۰)$$

که در آن m_l جرم هر لینک میانی و $\vec{H}_{G_l}^j$ تکانه زاویه‌ای j امین لینک میانی حول مرکز جرم آن ا ست. عبارت $\partial S_l^j/\partial\ddot{q}_i$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial S_l^j}{\partial \ddot{q}_i}=m_l\left(\vec{a}_{G_l}^j\cdot\frac{\partial \vec{a}_{G_l}^j}{\partial \ddot{q}_i}\right)+\frac{\partial\vec{\alpha}_j}{\partial \ddot{q}_i}\cdot {}^B I_l^j\vec{\alpha}_j+\frac{3}{2}\frac{\partial\vec{\alpha}_j}{\partial \ddot{q}_i}\cdot\left(\vec{\omega}_j\times {}^B I_l^j\vec{\omega}_j\right) \quad (۳۱)$$

که در آن ${}^B I_l^j$ تانسور اینرسی jامین لینک میانی ا ست که در سیستم مختصات پایه {B} تعریف شده است. با ایجاد رابطه بین شتاب نقاط A_j و G_l^j می‌توان شتاب خطی مرکز جرم لینک میانی را به دست آورد.

$$\vec{a}_{A_j}=\ddot{X}\vec{e}_1+\ddot{Y}\vec{e}_2+\ddot{\theta}_j\vec{e}_3\times\overrightarrow{BA_j}+\dot{\theta}_j\vec{e}_3\times\left(\dot{\theta}_j\vec{e}_3\times\overrightarrow{BA_j}\right) \quad (۳۲)$$

$$\vec{a}_{G_l^j/A_j}=\vec{\alpha}_j\times\overrightarrow{A_jG_l^j}+\vec{\omega}_j\times\left(\vec{\omega}_j\times\overrightarrow{A_jG_l^j}\right) \quad (۳۳)$$

$$\vec{a}_{G_l}^j=\vec{a}_{A_j}+\vec{a}_{G_l^j/A_j} \quad (۳۴)$$

عبارت $\partial\vec{a}_{G_l}^j/\partial\ddot{q}_i$ برای هر یک از مختصات تعمیم یافته برابر است با:

$$\frac{\partial \vec{a}_{G_l}^j}{\partial \ddot{q}_i}=\begin{cases}\vec{e}_i & ;\text{for } i=1,2\\ \frac{\partial\ddot{\theta}_j}{\partial\ddot{q}_i}\vec{e}_3\times\overrightarrow{BA_j}+\frac{\partial\vec{\alpha}_j}{\partial\ddot{q}_i}\overrightarrow{A_jG_l^j} & ;\text{for } i=3,\ldots,6\end{cases} \quad (۳۵)$$

با ا ستفاده از $\ddot{\theta}_j$ و $\vec{\alpha}_j$ به د ست آمده تو سط معادلات (۱۳) و (۱۴)، مشتق دوم آنها نسبت به مختصات تعمیم یافته را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

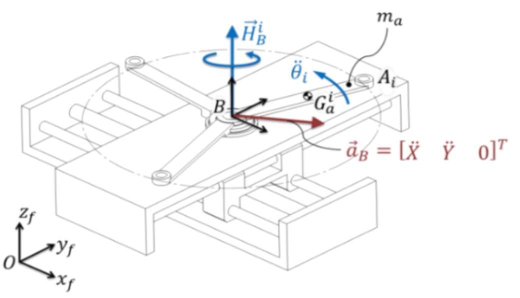
$$\frac{\partial\ddot{\theta}_j}{\partial\ddot{q}_i}=\frac{1}{a\vec{n}_j\cdot\left(\vec{e}_3\times\vec{u}_j\right)}\left\{\vec{n}_j\cdot\vec{e}_3+b\vec{n}_j\cdot\left(\frac{\partial\dot{\vec{\Omega}}}{\partial\ddot{q}_i}\times\mathcal{R}\vec{v}_j'\right)\right\} \quad (۳۶)$$

$$\frac{\partial\vec{\alpha}_j}{\partial\ddot{q}_i}=\frac{1}{l}\left\{\vec{n}_j\times\vec{e}_3+b\vec{n}_j\times\left(\frac{\partial\dot{\vec{\Omega}}}{\partial\ddot{q}_i}\times\mathcal{R}\vec{v}_j'\right)-a\frac{\partial\ddot{\theta}_j}{\partial\ddot{q}_i}\vec{n}_j\times\left(\vec{e}_3\times\vec{u}_j\right)\right\} \quad (۳۷)$$

با جایگزینی معادلات (۳۴) تا (۳۷) در معادله (۳۱) و با حل آن برای هر مختصات تعمیم یافته، آن عباراتی که مرتبط با نیروهای تعمیم یافته هستند برای لینک‌های میانی به دست می‌آید.

تحلیل معادلات گیبس-آپل برای لینک‌های محرک دوار

لینک‌های ربات متصل به محرک‌های دوار در شکل (۶) نشان داده شده است. جرم هر لینک دوار با m_a نشان داده شده است و نقطه G_a^i مرکز جرم لینک iام را نشان می‌دهد. متغیرهای $\ddot{\theta}_i$ و $\vec{H}_B^i$ به ترتیب شتاب زاویه‌ای و تکانه زاویه‌ای هر لینک حول محور چرخششان هستند. شتاب نقطه B که در واقع همان نقطه دل‌خواه در مشتقات معادله گیبس-آپل است، نیز در شکل نشان داده شده است.



شکل ۶ پارامترهای گیبس-آپل برای لینک‌های محرک دوار ربات

تابع انرژی شتاب لینک دوار jام در معادله (۳۸) آورده شده است.

$$S_a^j = \frac{1}{2} m_a (\vec{a}_B . \vec{a}_B) + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \vec{e}_3 \cdot \frac{\partial \vec{H}_B^j}{\partial t} + m_a \vec{a}_B . \left(\ddot{\theta}_j \vec{e}_3 \times \overrightarrow{BG_a^j}\right) + m_a \vec{a}_B \cdot \left[\dot{\theta}_j \vec{e}_3 \times (\dot{\theta}_j \vec{e}_3 \times \overrightarrow{BG_a^j}\right] \tag{۳۸}$$

در نتیجه مشتق تابع انرژی شتاب نسبت به مختصات تعمیم یافته به صورت معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial S_a^j}{\partial \ddot{q}_1} = \frac{\partial S_a^j}{\partial \ddot{X}} = m_a \ddot{X} + m_a \vec{e}_1 \cdot \left(\ddot{\theta}_j \vec{e}_3 \times \overrightarrow{BG_a^j}\right) + m_a \vec{e}_1 \cdot \left(\dot{\theta}_j \vec{e}_3 \times \left(\dot{\theta}_j \vec{e}_3 \times \overrightarrow{BG_a^j}\right)\right) \tag{۳۹}$$

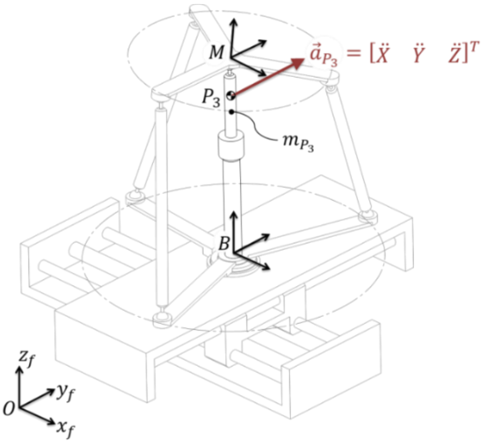
$$\frac{\partial S_a^j}{\partial \ddot{q}_2} = \frac{\partial S_a^j}{\partial \ddot{Y}} = m_a \ddot{Y} + m_a \vec{e}_2 \cdot \left(\ddot{\theta}_j \vec{e}_3 \times \overrightarrow{BG_a^j}\right) + m_a \vec{e}_2 \cdot \left(\dot{\theta}_j \vec{e}_3 \times \left(\dot{\theta}_j \vec{e}_3 \times \overrightarrow{BG_a^j}\right)\right) \tag{۴۰}$$

$$\frac{\partial S_a^j}{\partial \ddot{q}_3} = \frac{\partial S_a^j}{\partial \ddot{Z}} = I_{a_j}^z \ddot{\theta}_j \frac{\partial \ddot{\theta}_j}{\partial \ddot{Z}} + m_a \vec{a}_B \cdot \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_j}{\partial \ddot{Z}} \vec{e}_3 \times \overrightarrow{BG_a^j}\right) \tag{۴۱}$$

$$\frac{\partial S_a^j}{\partial \ddot{q}_i} = I_{a_j}^z \ddot{\theta}_j \frac{\partial \ddot{\theta}_j}{\partial \ddot{q}_i} + m_a \vec{a}_B \cdot \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_j}{\partial \ddot{q}_i} \vec{e}_3 \times \overrightarrow{BG_a^j}\right); \quad \text{for } i = 4,5,6 \tag{۴۲}$$

تحلیل معادلات گیبس-آپل برای سیلندر مرکزی

در شکل (۷) مرکز جرم سیلندر یا همان نقطه P_3 و بردار شتاب آن نیز نشان داده شده است.



شکل ۷ پارامترهای گیبس-آپل برای سیلندر مرکزی ربات

تابع انرژی شتاب سیلندر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_{P_3} = \frac{1}{2} m_{P_3} \left(\vec{a}_{P_3} \cdot \vec{a}_{P_3}\right) \tag{۴۳}$$

که m_{P_3} جرم سیلندر مرکزی و $\vec{a}_{P_3}$ بردار شتاب خطی آن است. با محاسبه مشتق دوم معادله (۴۵) نسبت به شتاب مختصات تعمیم یافته، معادله (۵۰) به دست خواهد آمد.

$$\frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{q}_i} = m_{P_3} \left(\vec{a}_{P_3} \cdot \frac{\partial \vec{a}_{P_3}}{\partial \ddot{q}_i}\right) \tag{۴۴}$$

در ادامه معادله (۴۴) نسبت به هر مختصات تعمیم یافته گسترش می‌یابد که در معادلات (۴۵) تا (۴۸) آورده شده است.

$$\frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{X}} = m_{P_3} \ddot{X} \tag{۴۵}$$

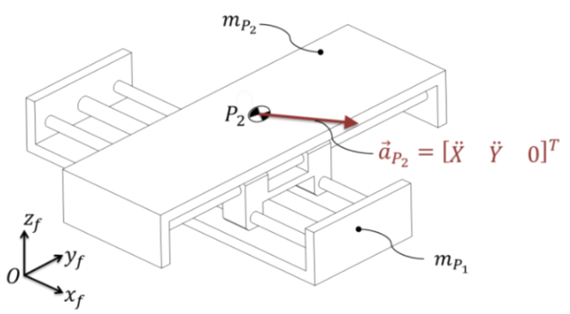
$$\frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{Y}} = m_{P_3} \ddot{Y} \tag{۴۶}$$

$$\frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{Z}} = m_{P_3} \ddot{Z} \tag{۴۷}$$

$$\frac{\partial S_{P_3}}{\partial \ddot{q}_i} = 0, \qquad \text{for i=3,…,6} \tag{۴۸}$$

تحلیل معادلات گیبس-آپل برای میز XY

دو ماژول خطی عمود بر هم که حرکت در راستای X و Y را ایجاد می‌کند با مرکز جرم‌های P_1 و P_2 در شکل (۸) نشان داده شده است. ماژولی که در جهت X حرکت می‌کند با $j = 1$ و دیگری با $j = 2$ شناخته می‌شود.



شکل ۸ پارامترهای گیبس-آپل برای میز XY

از آنجایی که میز XY دارای یک حرکت خطی است، تابع انرژی شتاب برای هر ماژول را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد،

$$S_{P_j} = \frac{1}{2} m_{P_j} \left(\vec{a}_{P_j} \cdot \vec{a}_{P_j} \right) \tag{۴۹}$$

که در آن m_{P_j} جرم هر ماژول خطی و $\vec{a}_{P_j}$ بردار شتاب مرکز جرم آن‌ها است. مشتق انرژی شتاب ماژول Y نسبت به شتاب مختصات تعمیم یافته به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial S_{P_2}}{\partial \ddot{q}_i} = m_{P_2} \left(\vec{a}_{P_2} \cdot \frac{\partial \vec{a}_{P_2}}{\partial \ddot{q}_i} \right) \tag{۵۰}$$

معادله (۵۰) برای هر یک از مختصات تعمیم یافته به صورت جداگانه در معادلات (۵۱) تا (۵۳) بسط داده شده است.

$$\frac{\partial S_{P_2}}{\partial \ddot{q}_1} = \frac{\partial S_{P_2}}{\partial \ddot{X}} = m_{P_2} \ddot{X} \tag{۵۱}$$

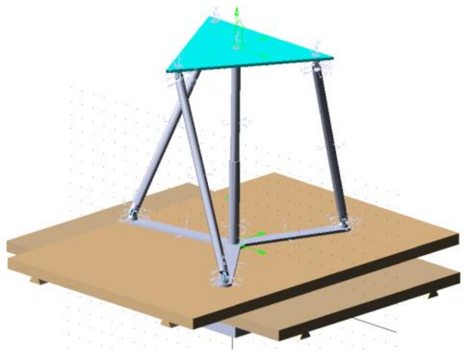
$$\frac{\partial S_{P_2}}{\partial \ddot{q}_2} = \frac{\partial S_{P_2}}{\partial \ddot{Y}} = m_{P_2} \ddot{Y} \tag{۵۲}$$

$$\frac{\partial S_{P_2}}{\partial \ddot{q}_i} = 0, \quad \text{for i = 3,…,6} \tag{۵۳}$$

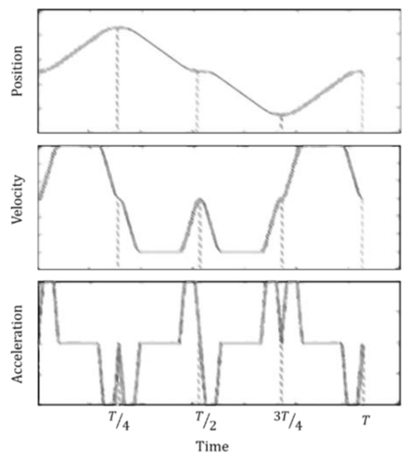
با اعمال همین رویه برای ماژول خطی در جهت X، مقدار $\partial S_{P_1} / \partial \ddot{q}_i$ برای هر مختصات تعمیم یافته نیز به دست می‌آید.

شبیه‌سازی و اعتبارسنجی نتایج

برای اطمینان از حل صحیح معادلات دینامیکی ربات PP-(3RSS-PS)، نتایج مدل تئوری با نتایج شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار مدل‌سازی دینامیکی ADAMS مقایسه شده است. شکل (۹– الف) مدل شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار ADAMS را نشان می‌دهد. به منظور ایجاد یک شبیه‌سازی مناسب برای ربات هیبریدی مورد نظر، شش مسیر در فضای کاری کارتزین تعریف شده است. مسیر برای هر درجه آزادی نسبت به سیستم مختصات پایه به این صورت تعریف می‌شود که، ابتدا ربات در جهت مثبت از موقعیت اولیه خود تا حد انتهای درجه آزادی متناظر حرکت می‌کند. در طی این حرکت ربات به حداکثر سرعت و شتاب خود نیز می‌رسد. سپس ربات با همان ویژگی‌های حرکتی به حالت اولیه بر می‌گردد. با تکرار متوالی مسیر دو مرحله‌ای در جهت مخالف، ربات به طور کامل فضای کاری تک درجه آزادی خود را طی می‌کند [27]. شکل (۹–ب) نمودارهای موقعیت، سرعت و شتاب مجری نهایی ربات را برای هر یک از مسیرها نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

شکل ۹ (الف) مدل شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار ADAMS، (ب) مسیر طراحی شده برای مجری نهایی ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS)

با توجه به روش ذکر شده، مسیر هر درجه آزادی با استفاده از حداکثر مقادیر مورد نظر برای موقعیت، سرعت و شتاب مندرج در جدول (۱) به دست خواهد آمد.

مقادیر پارامترهای سینماتیکی و دینامیکی ربات برای شبیه سازی در جدول (۲) آورده شده است. لازم به ذکر است که ممان اینرسی با توجه به محورهای اصلی برای هر عضو متحرک بیان شده است.

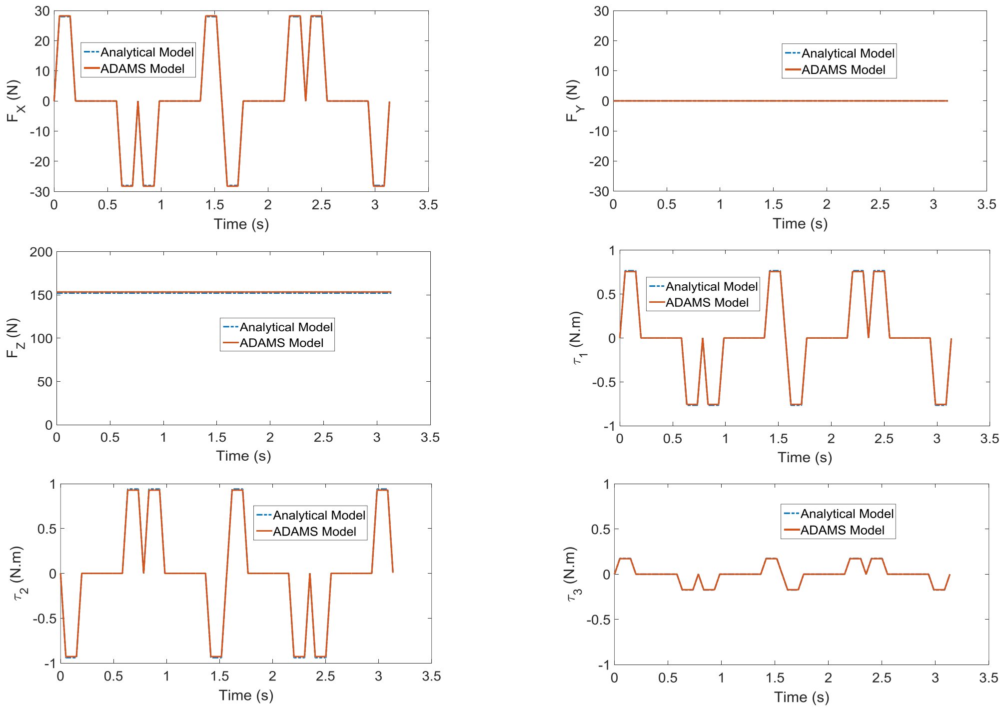
به منظور خلاصه‌سازی در ادامه نمودار نیروها و گشتاورهای محرک‌های ربات برای درجه آزادی انتقالی Surge و برای درجه آزادی دورانی Yaw به صورت جداگانه برای حل تئوری و مدل شبیه‌سازی آورده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، نیروی محرک ربات سریال در محور عمود بر جهت مسیر حرکت برابر با صفر است در حالی که برای ربات موازی برای انجام کامل یک مسیر لازم است که تمام محرک‌ها نیرویی اعمال کنند. از مقایسه دو حل موجود مشاهده می‌شود تحلیل دینامیک ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS) به درستی انجام شده است.

جدول ۱ مسیر طراحی شده برای مجری نهایی ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS)

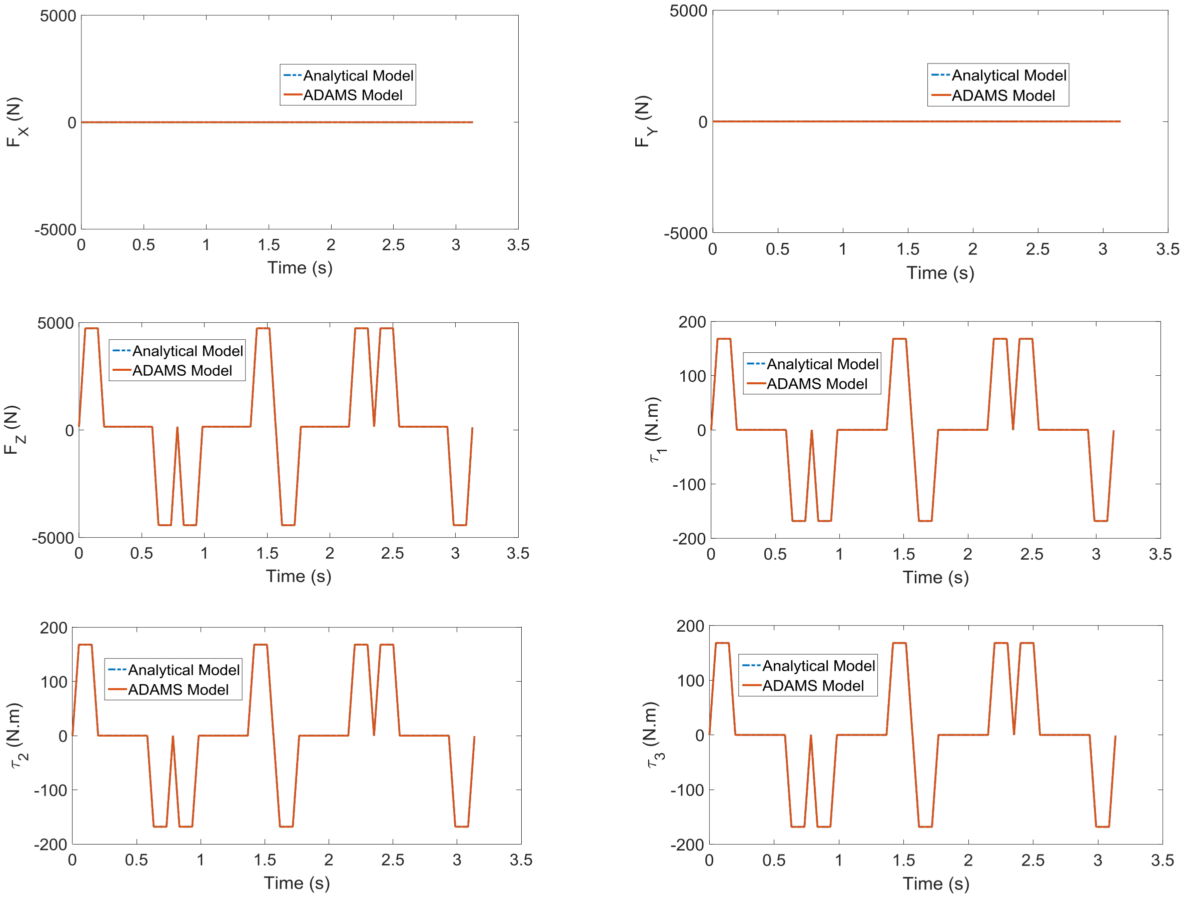
درجه آزادی	Surge	Sway	Heave	Roll	Pitch	Yaw
موقعیت $(cm)\|(°)$	± 9	± 9	± 4	± 8	± 8	± 24
سرعت $(cm/s)\|(°/s)$	15	15	6	13	13	42
شتاب $(cm/s^2)\|(°/s^2)$	100	100	40	88	88	280

جدول ۲ پارامترهای سینماتیکی و دینامیکی ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS)

عضو متحرک ربات	پارامتر	مقدار	عضو متحرک ربات	پارامتر	مقدار
لینک‌های دوار	a	0.40 (m)	میز X و Y	$\begin{Bmatrix} m_{P_1} \\ m_{P_2} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.00\ (kg) \\ 1.00\ (kg) \end{Bmatrix}$
لینک‌های میانی	l	0.70 (m)	لینک‌های دوار	$\begin{Bmatrix} m_a \\ I_a^z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2.00\ (kg) \\ 0.50\ (kg.m^2) \end{Bmatrix}$
صفحه متحرک	b	0.27 (m)	لینک‌های میانی	$\begin{Bmatrix} m_l \\ {}^{N}I_l \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.00\ (kg) \\ diag\ (2, 2, 2)(kg.m^2) \end{Bmatrix}$
			صفحه متحرک	$\begin{Bmatrix} m_P \\ {}^{M}I_P \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.00\ (kg) \\ diag\ (100, 100, 100)(kg.m^2) \end{Bmatrix}$



شکل ۱۰ نمودار نیروها و گشتاورهای مورد نیاز برای محرک‌های ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS) در مسیر حرکتی Surge



شکل ۱۱ نمودار نیروها و گشتاورهای مورد نیاز برای محرک‌های ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS) در مسیر حرکتی Yaw

جدول ۳ مقدار میانگین توان دوم خطاهای عملگرهای ربات هیبریدی برای مسیر Yaw

عملگر مربوطه	F_X	F_Y	F_Z	τ_1	τ_2	τ_3
MSE	4.13×10^{-11}	3.22×10^{-11}	5.31×10^{-11}	3.62×10^{-5}	3.67×10^{-5}	3.46×10^{-5}

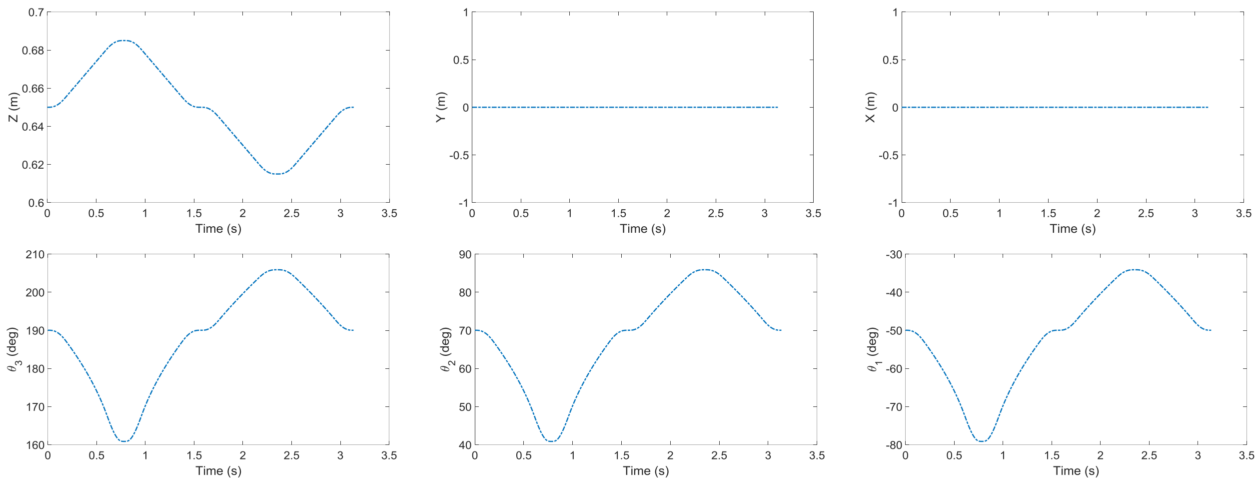
به منظور مقایسه بین نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی میانگین توان دوم خطاها (Mean Squared Error) (MSE) برای هر کدام از عملگرها و به عنوان نمونه فقط برای مسیر Yaw به صورت جداگانه محاسبه شده است و نتایج آن در جدول (۳) آورده شده است. برای به دست آوردن میانگین توان دوم خطا از یک مجموعه‌ای که دارای n داده است می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 \qquad (۵۴)$$

که در آن $(Y_i - \hat{Y}_i)^2$ مقدار مربع خطای هر داده را محاسبه می‌کند.

با توجه به مقادیر به دست آمده مشاهده می‌شود نتایج شبیه‌سازی و تحلیلی از مطابقت خوبی با هم برخوردار هستند.

لازم به ذکر است دقت شود عملگرهای خطی و دورانی ربات هیبریدی معرفی شده به طور مستقیم تأثیر حرکتی خود را در حرکت درجات آزادی ربات نشان می‌دهند. این بدان منظور است که به عنوان مثال در راستای حرکتی Heave علاوه بر نقش مؤثر عملگر خطی میانی سه عملگر دورانی ربات نیز می‌بایست حرکت کنند تا مجری نهایی ربات حرکتی در راستای Z داشته باشد. شکل (۱۲) نحوه حرکتی عملگرهای خطی و دورانی ربات را به ازای حرکت در راستای Heave ا نشان می‌دهد.



شکل ۱۲ موقعیت عملگرهای خطی و دورانی ربات هیبریدی به ازای حرکت در راستای Heave

نتیجه‌گیری

نتایج شبیه سازی با استفاده از خروجی‌های نرم‌افزار ADAMS در شش مسیر مشخص، صحت مدل دینامیکی به دست آمده را ثابت کرده‌اند. در نتیجه می‌توان از مدل‌های تحلیلی و شبیه‌سازی به جای یکدیگر استفاده کرد. صریح بودن روش گیبس-آپل، استخراج معادلات و تولید کد برنامه‌نویسی را آسان کرده است زیرا از یک تابع ثابت برای محاسبه دینامیک هر قسمت به طور جداگانه استفاده می شود. چیزی که این ربات را نسبت به سایر ربات‌ها متمایز می‌کند، فضای کاری ماژولار مستقل X و Y و حرکت یاو نامحدود با طراحی فشرده آن است. این ویژگی‌های ذکر شده ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS) را به گزینه‌ای مناسب برای شبیه ساز رانندگی تبدیل می‌کند که برای مراحل شتاب و کاهش سرعت به محدوده حرکت طولی و حرکت یاو زیادی نیاز دارد. ربات هیبریدی PP-(3RSS-PS) پیشنهادی می‌تواند به عنوان یک مطالعه موردی برای بهینه‌سازی و مقایسه با سایر شبیه‌سازهای معمولی با در نظر گرفتن شاخص‌های عملکرد مختلف استفاده شود.

فهرست علائم

a	طول هر یک از لینک‌های دوار
$\vec{a}_M$	شتاب مجری نهایی ربات
b	طول هر یک از لبه‌های صفحه متحرک
C_1	دایره‌ای که از مرکز اتصالات کروی پایین می‌گذرد
C_2	دایره‌ای که از مرکز اتصالات کروی بالا می‌گذرد
$\vec{e}_i$	بردارهای واحد در سیستم مختصات ثابت و پایه
F_{e_i}	نیروی اعمال شده در امتداد $\vec{e}_i$
$\vec{H}_M$	تکانه زاویه‌ای صفحه متحرک حول مرکز جرم آن
${}^{B}I_l^j$	تانسور اینرسی jامین لینک میانی
J	ماتریس ژاکوبین ربات
l	طول هر یک از لینک‌های میانی
m_a	جرم هر یک از لینک‌های دوار
m_l	جرم هر یک از لینک‌های میانی
m_{P_1}	جرم محرک خطی در راستای X
m_{P_2}	جرم محرک خطی در راستای Y
m_{P_3}	جرم سیلندر مرکزی
M	مرکز صفحه متحرک
$\vec{n}_i$	بردار یکه در راستای لینک میانی iام
S_a^j	تابع انرژی شتاب برای jامین محرک دورانی
S_l^j	تابع انرژی شتاب برای jامین لینک میانی
S_{P_i}	تابع انرژی شتاب محرک‌های خطی
$\vec{u}_i$	بردار یکه در راستای لینک دورانی iام
$\vec{v}_i$	بردار یکه در راستای لبه‌ی iام صفحه متحرک
$\vec{\alpha}_i$	شتاب زاویه‌ای لینک میانی iام
$\mathcal{R}$	ماتریس دوران
θ_i	زاویه دوران لینک دوار iام
$\dot{\theta}_i$	سرعت زاویه‌ای لینک دوار iام
$\ddot{\theta}_i$	شتاب زاویه‌ای لینک دوار iام
$\vec{\Omega}$	سرعت زاویه‌ای صفحه متحرک
$\dot{\vec{\Omega}}$	شتاب زاویه‌ای صفحه متحرک

$\vec{\omega}_i$ سرعت زاویه‌ای لینک میانی iام

τ_i گشتاور اعمال شده به لینک دوار iام

واژه نامه

تابع انرژی شتاب	Acceleration energy function
شتاب زاویه‌ای	Angular acceleration
تکانه زاویه‌ای	Angular momentum
سرعت زاویه‌ای	Angular velocity
زنجیره سینماتیک بسته	Closed kinematic chain
دینامیک	Dynamics
مجری نهایی	End- Effector
روش گیبس– اپل	Gibbs- Appell Method
ژاکوبین	Jacobian
ربات هیبریدی	Hybrid Robot
سینماتیک	Kinematics
میانگین توان دوم خطاها	Mean square error
ربات موازی	Parallel robot
ربات سریال	Serial robot
نظریه پیچ	Screw theory
مسیر	Trajectory

تقدیر و تشکر

مراجع

[1] M. Shahinpoor, "Kinematics of a parallel- serial (Hybrid) manipulator," *Journal of Robotic Systems*, vol. 9, no. 1, pp. 17-36, (1992).

[2] R. Ricard and C. Gosselin, "On the development of hybrid planar manipulators," *IEEE in Proceedings of 36th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, pp. 398-401, (1993).

[3] S. Lee and S. Kim, "Efficient inverse kinematics for serial connections of serial and parallel manipulators," *IEEE in Proceedings of 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'93)*, vol. 3, pp. 1635-1641, (1993).

[4] A. Campos, C. Budde, and J. Hesselbach, "A type synthesis method for hybrid robot structures," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 43, no. 8, pp. 984-995, (2008).

[5] K. Etemadi-Zanganeh and J. Angeles, "Instantaneous kinematics of general hybrid parallel manipulators," 1995.

[6] S. Kim and W. Kim, "On the structure of the macro-micro neurosurgical robots in stereotactic surgery," *Hanyang Medical Reviews*, vol. 36, no. 4, pp. 254-261, (2016).

[7] D. Zhang, J. Chen, W. Li, D. B. Salinas, and G.-Z. Yang, "A microsurgical robot research platform for robot-assisted microsurgery research and training," *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, vol. 15, no. 1, pp. 15-25, (2020).

[8] G. Tosolin, J. Cartró, and V. Sharma, "Development of model predictive motion planning and control for autonomous vehicles," *Springer in 10th International Munich Chassis Symposium 2019*, pp. 323-340, (2020).

[9] Y. Feng, J. Fan, B. Tao, S. Wang, J. Mo, Y. Wu, Q. Liang, and X. Chen, "An image-guided hybrid robot system for dental implant surgery, " *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, vol. 17. no.1, pp.15-26, (2022).

[10] C. Dong, H. Liu, J. Xiao, and T. Huang,, "Dynamic modeling and design of a 5-DOF hybrid robot for machining,," *Mechanism and Machine Theory*, vol. *165*, p.104438, (2021).

[11] H. D. Yang and A. T. Asbeck, "Design and characterization of a modular hybrid continuum robotic manipulator, " *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 25, no.6, pp.2812-2823, (2020).

[12] J. Enferadi and K. Jafari, "A Kane's based algorithm for closed-form dynamic analysis of a new design of a 3RSS-S spherical parallel manipulator," *Multibody System Dynamics*, vol. 49, pp. 377-394, (2020).

[13] R. Kelaiaia, O. Company, and A. Zaatri, "Multiobjective optimization of a linear Delta parallel robot," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 50, pp. 159-178, (2012).

[14] J. Enferadi and R. Nikrooz, "The performance indices optimization of a symmetrical fully spherical parallel mechanism for dimensional synthesis," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 90, no. 3-4, pp. 305-321, (2018).

[15] S. N. Nabavi, M. Shariatee, J. Enferadi, and A. Akbarzadeh, "Parametric design and multi-objective optimization of a general 6-PUS parallel manipulator," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 152, p. 103913, (2020).

[16] S. N. Nabavi, A. Akbarzadeh, J. Enferadi, and I. Kardan, "A homogeneous payload specific performance index for robot manipulators based on the kinetic energy," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 130, pp. 330-345, (2018).

[17] Z. Gao and D. Zhang, "Performance analysis, mapping, and multiobjective optimization of a hybrid robotic machine tool," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, no. 1, pp. 423-433, (2014).

[18] S. Kucuk, "Dexterous workspace optimization for a new hybrid parallel robot manipulator," *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 10, no. 6, (2018).

[19] O. Ibrahim and W. Khalil, "Inverse and direct dynamic models of hybrid robots," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, no. 4, pp. 627-640, (2010).

[20] S. N. Nabavi, A. Akbarzadeh, and J. Enferadi, "Closed-Form Dynamic Formulation of a General 6-P US Robot," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 96, no. 3-4, pp. 317-330, (2019).

[21] J. Gallardo-Alvarado, C. R. Aguilar-Nájera, L. Casique-Rosas, J. M. Rico-Martínez, and M. N. Islam, "Kinematics and dynamics of 2 (3-RPS) manipulators by means of screw theory and the principle of virtual work," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 43, no. 10, pp. 1281-1294, (2008).

[22] Y. Wu, Z. Yang, Z. Fu, J. Fei, and H. Zheng, "Kinematics and dynamics analysis of a novel five-degrees-of-freedom hybrid robot," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 14, no. 3, p. 1729881417716634, (2017).

[23] Y. Yun and Y. Li, "Modeling and control analysis of a 3-PUPU dual compliant parallel manipulator for micro positioning and active vibration isolation," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 134, no. 2, (2012).

[24] D. Zhang, Y. Xu, J. Yao, and Y. Zhao, "Design of a novel 5-DOF hybrid serial-parallel manipulator and theoretical analysis of its parallel part," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 53, pp. 228-239, (2018).

[25] J. W. Gibbs, "On the fundamental formulae of dynamics," *American Journal of Mathematics*, vol. 2, no. 1, pp. 49-64, (1879).

[26] P. Appell, "Sur les mouvements de roulment; equations du mouvement analougues a celles de Lagrange," *Comptes Rendus*, vol. 129, pp. 317-320, (1899).

[27] M. Shariatee, A. Akbarzadeh, and N. Nabavi, "Design of a Pneumatic Weight Compensation System for the FUM Stewart Robot," *IEEE in 2017 5th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM)*, , pp. 624-629, (2017).